Errores de Medicion

Walter Sosa-Escudero

May 18, 2014

Motivacion

Un caso particular en que los regresores son necesariamente aleatorios es cuando hay errores de medicion.

Variablee explicativas medidas con error

Consideremos el siguiente caso simple

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^* + u_i$$

Por ejemplo, C puede ser consumo y X_i^* el ‘ingreso permanente’.

Supongamos que solo observamos una version ‘ruidosa’de X_i^*:

$$X_i = X_i^* + \omega_i$$

ω_i es un error de medicion.

Por ejemplo, X_i podria ser el ingreso corriente.

Supondremos $E(\omega_i) = 0$, $V(\omega_i) = \sigma^2_\omega$ y ω no correlacionado con X_i^* y u_i.

Reemplazando $X_i^* = X_i - \omega_i$, el modelo puede ser escrito como

$$C_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \nu_i$$

con $\nu = -\beta_2 \omega_i + u_i$

Pero

$$\begin{aligned} Cov(X_i, \nu_i) = E(X_i, \nu_i) &= E\left[(X_i^* + \omega_i)(-\beta_2\omega_i + u_i)\right] \\ &= -\beta_2\sigma_\omega^2 \quad \neq 0 \end{aligned}$$

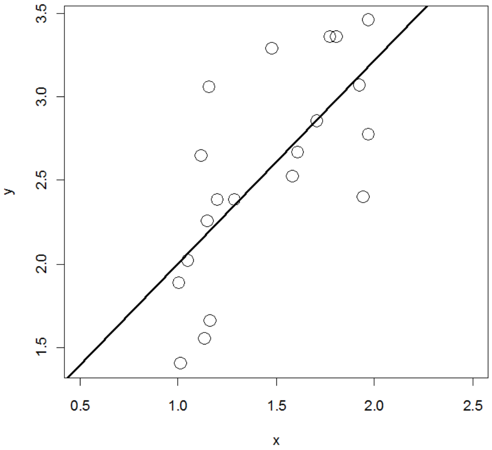
Entonces, el estimador de MCO que regresa Y_i en X_i es sesgado, ya que X_i esta correlacionado con el termino de error ν_i.

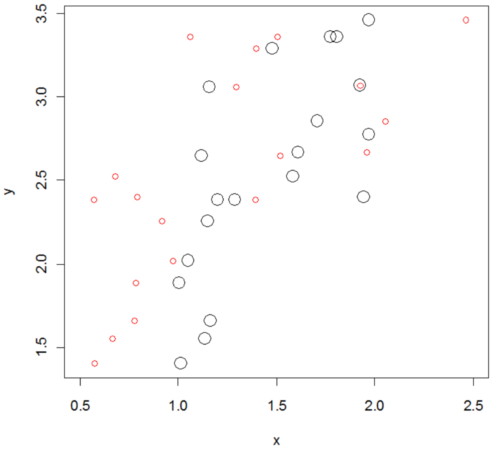
Es posible mostrar que cuando n es relativamente grande:

$$\hat{\beta} \simeq \beta \left[\frac{\sigma^2_{X^*}}{\sigma^2_\omega + \sigma^2_{X^*}} \right]$$

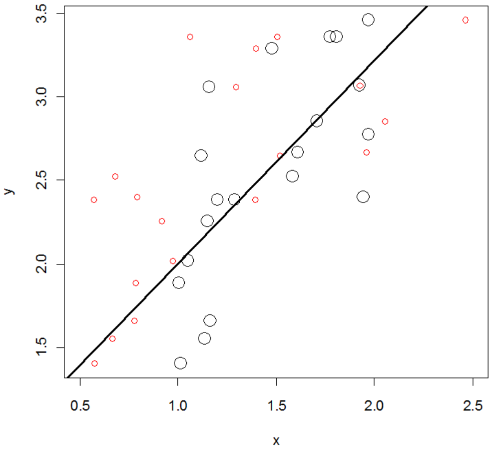
Este es un resultado muy importante

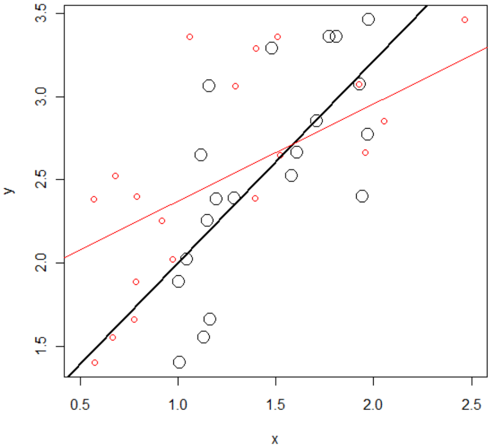
- $\sigma^2_{X^*}/(\sigma^2_\omega + \sigma^2_{X^*})$ es un numero entre 0 y 1.
- Entonces, $|\hat{\beta}|$ tiende a ser menor que β: el error de medicion en la variable explicativa implica un sesgo de atenuacion.
- Los errors de medicion contraen las estimaciones hacia cero.
- Cuidado con echarle la culpa a los errores de medicion por las no-significatividades!


3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x



3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
y
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x


y
x
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5



y
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x

$$Y^* = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

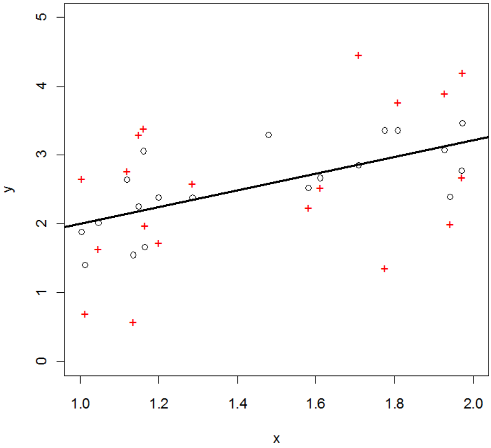
$$Y_i = Y^* + \omega_i$$

ω_i no correlacionada con u_i, $V(\omega_i) = \sigma^2_\omega$
Reemplazando

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_i + \omega_i + u_i \\ &= \beta_1 + \beta_2 X_i + \nu_i \end{aligned}$$

Error de medicion en la variable explicada

- Notar que bajo nuestros supuestos, $\nu_i \equiv \omega_i + u_i$ no esta correlacinada con X_i, entonces, la presencia de errores de mediicion en la variable explicada no sesga al estimador de MCO.
- $V(\nu_i) = \sigma_\omega^2 + \sigma^2 > \sigma^2$, la varianza del 'nuevo' termino de error es mayor que la que habria en un modelo sin errores de medicion: los errores de medicion en la variable dependiente hacen que el estimador OLS sea mas ineficiente.



5
4
3
2
1
0
y
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
x

Ejempo: ahorro micro y macro

Modelo de ahorro para personas:

$$s_i = \alpha + \beta y_i^* + u_i$$

donde: s_i = ahorro; y_i^* = ingreso permanente (no observable)

Estimamos:

$$s_i = \alpha + \beta y_i + \nu_i$$

y_i = ingreso corriente

Recordar que la version 'macro' (en base a las cuentas nacionales) tiene un R^2 muy alto. . Consideremos la version 'micro' con datos individuales.

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 05/16/00 Time: 19:48
Sample: 1 50
Included observations: 50

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.342769	0.856116	5.072643	0.0000
X	-0.005185	0.011163	-0.464539	0.6444

R-squared	0.004476	Mean dependent var	3.950660
Adjusted R-squared	-0.016264	S.D. dependent var	1.003267
S.E. of regression	1.011393	Akaike info criterion	2.899713
Sum squared resid	49.09998	Schwarz criterion	2.976193
Log likelihood	-70.49281	F-statistic	0.215796
Durbin-Watson stat	1.856169	Prob(F-statistic)	0.644362

El ingreso no es relavante: sesgo por atenuacion.

Que es lo que explica las diferencias entre las versiones micro y macro?

En la versin 'macro' Y_t es el ingreso corriente, una suerte de promedio

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{n}\sum_{i=1} n y_{it} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1} n y^*_{it} + \frac{1}{n}\sum_{i=1} n \omega^*_{it}
\end{aligned}
$$

Notar que

$$
V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1} n\omega^*_{it}\right] = \frac{1}{n}\sigma^2_\omega
$$

Entonces, la 'importancia' del error de medicion tiende a desaparecer: el ingreso corriente agregado hace un trabajo relativamente buen en aproximar el ingreso permanente, pero no a nivel individual.