Regresores Aleatorios

Walter Sosa-Escudero

May 10, 2009

Modelo lineal clasico:

1. Linealidad: $Y = X\beta + u$.
2. $E(u) = 0$
3. No Multicolinealidad: $\rho(X) = K$. X no aleatoria.
4. No heteroscedasticidad/ correlacion serial: $V(u) = \sigma^2 I_n$.

En una ciencia social como la economia, es casi seguro que X es aleatoria.

El modelo clasico con regresores aleatorios

1. Linealidad: $Y = X\beta + u$.
2. Exogeneidad estricta: $E(u|X) = 0$
3. No Multicolinealidad: $\rho(X) = K$. X puede ser aleatoria.
4. No heteroscedasticidad/ correlacion serial: $V(u) = \sigma^2 I_n$.

Nota: cuando permitimos que X sea aleatoria, tenemos que cambiar $E(u) = 0$ for $E(u|X) = 0$

El significado de $E(u|X) = 0$

- *Esperanza condicional:* Para cualquier par de variables aleatorias, $E(Y|Z = z)$ es el valor esperado que toma Y dado que Z es igual a z.
- *Ejemplo:* altura promedio para personas que tienen edad 21 $(E(altura|edad = 21))$.
- Propiedad muy importante 1: $E(YZ|Z) = ZE(Y|Z)$.
- Propiedad muy importante 2 2: $E(Y) = E(E(Y|Z))$: the ley de esperanzas iteradas. Intuicion: edad/genero.

Un resultado importante es el siguiente: $E(u|x)$ implica $E(u) = 0$.

$$E(u) = E(E(u|X)) = E(0) = 0$$

Entonces, $E(u|X)$ es un supuesto mas fuerte que $E(u) = 0$.

Entonces... cual es el significado de $E(u|X) = 0$? Volvamos al modelo simple con dos variables:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$$

$$\begin{aligned} Cov(X, u) &= E\left[(X - E(X))(u - E(u))\right] \\ &= E\left[(X - E(X))u\right] \\ &= E(Xu) - E(X)E(u) \\ &= E(Xu) \end{aligned}$$

Pero

$$E(Xu) = E[E(Xu)|X] = E(XE(u|X)) = 0$$

En general: significa que las variables explicativas no estan correlacionadas con el termino de error.

Resultado imporante: under all the assumptions for random regressors, the old OLS estimator is the best linear unbiased estimator.

Prueba de la insesgadez

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'Y \\
&= (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'u \\
E(\hat{\beta}|X) &= \beta + E\left[(X'X)^{-1}X'u|X\right] \\
&= \beta + (X'X)^{-1}X'E\left[u|X\right] \\
&= \beta \qquad \text{(Since } E(u|X) = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Usando la ley de esperanzas iteradas

$$E(\hat{\beta}) = E(E(\hat{\beta}|X)) = E(\beta) = \beta$$

- La inclusion de regresores aleatorios implica adoptar supuestos mas fuertes acerca de la relacion entre X y u. (antes era suficiente con suponer $E(u)$, ahora necesitamos $E(u|X) = 0$).
- Si podemos hacer este supuesto, podemos usar MCO en forma segura.
- Ya vimos un resultado similar: si el termino de error esta correlacionado con X, el estimador MCO es sesgado.
- In la practica, es mejor suponer que los regresores *son aleatorios* y cuestionarse si realmente $E(u|X) = 0$.